



# UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

| 1. DATOS GENERALES DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE (UA) O ASIGNATURA      |   |  |                          |
|---|---|--|--------------------------|
| <b>Nombre de la Unidad de Aprendizaje (UA) o Asignatura</b>           |   |  | <b>Clave de la UA</b>    |
| Taller de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales                        |   |  | 15964                    |
| <b>Modalidad de la UA</b>   | <b>Tipo de UA</b>   | <b>Área de formación</b>               | <b>Valor en créditos</b> |
| Escolarizada  | Taller  | Básica común obligatoria               | 2                        |
| <b>UA de pre-requisito</b>  | <b>UA simultaneo</b>                                      | <b>UA posteriores</b>                  |                          |
| Teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias II<br>(15934)           | Taller de sistemas de ecuaciones diferenciales<br>(15964) | Ninguna                                |                          |
| <b>Horas totales de teoría</b>  | <b>Horas totales de práctica</b>                          | <b>Horas totales del curso</b>         |                          |
| 0   | 34  | 34                                     |                          |
| <b>Licenciatura(s) en que se imparte</b>                              |   | <b>Módulo al que pertenece</b>         |                          |
| Matemáticas   |   | Ecuaciones Diferenciales               |                          |
| <b>Departamento</b>   |   | <b>Academia a la que pertenece</b>     |                          |
| Matematicas   |   | Modelacion Matematica                  |                          |
| <b>Elaboró</b>  |   | <b>Fecha de elaboración o revisión</b> |                          |
| Martín Muñoz Chávez<br>Néstor García Chan<br>Miguel Angel Olmos Gómez |   |  |                          |



**2. DESCRIPCIÓN DE LA UA O ASIGNATURA**

**Presentación**

Los sistemas de ecuaciones diferenciales juegan un rol esencial en la descripción matemática de ciertos fenómenos físico, ya que en general no resulta fácil hallar leyes que vinculen directamente las magnitudes que caracterizan dichos fenómenos, aunque si es posible en muchos casos determinar la dependencia entre esas magnitudes y sus derivadas. Esto, en general, da origen a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, mismo que determinará la evolución del sistema físico.

Esta UA es complementaria a la UA 15963 sistemas de ecuaciones diferenciales que tiene como propósito aplicar los métodos de solución para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales aplicados en ciertos fenomenos físicos o en el área de las ciencias exactas e ingeniería así como interpretar el comportamiento de dichas soluciones alrededor de un punto critico. La UA permite a los estudiantes fortalecer los conocimientos adquiridos en la UA 15963 así como definir sus estrategias al resolver problemas en donde surjan sistemas de ecuaciones diferenciales.

**Relación con el perfil**

**Modular**

**De egreso**

Al igual que la UA 15963 (sistemas de ecuaciones diferenciales), esta unidad de aprendizaje pertenece al módulo de Ecuaciones Diferenciales cuyo objetivo es desarrollar la capacidad de identificar los sistemas autonomos y no autonomos, lineales y no lineales. Se analizan las diferentes formas de resolver un sistema de ecuaciones lineales y se elige el mas idoneo para resolver problemas aplicados en el área de la física-matemáticas o áreas afines utilizando el lenguaje matemático adecuado.

Conforme al perfil de egreso de la licenciatura en matemáticas, el alumno tendrá las herramientas necesarias para proponer modelos que se resuelvan con sistemas de ecuaciones diferenciales ya sea de la vida real, la matemática misma o de otras ciencias como física, química, etc. Utilizando todas las herramientas a su alcance, bibliografía y/o equipo de cómputo así como de algún software

**Competencias a desarrollar en la UA o Asignatura**

**Transversales**

**Genéricas**

**Profesionales**

1. Aplica los conceptos básicos para modelar un problema de la física matemática.
2. Contrasta la información con diferentes fuentes bibliográficas.
3. Desarrolla su capacidad de comunicación acertiva al explicar la solución de un problema ante sus compañeros o personas de otras disciplinas.
4. Crea algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones y comprender el fenómeno de estudio logrando un aprendizaje significativo.

1. Clasifica un sistema de ecuaciones diferenciales.
2. Distingue un sistema lineal de uno no lineal, autonomo y no autonomo.
3. Identifica las diferentes formas de expresar la solucion de un sistema de ecuaciones diferenciales.
4. Utiliza el pensamiento cualitativo y razonamiento analítico para identificar cuando un sistema no lineal se puede linealizar.
5. Clasifica los puntos criticos de un sistema de ecuaciones diferenciales.
6. Utiliza herramientas de computo científico como apoyo para entender y resolver sistemas de ecuaciones no lineales

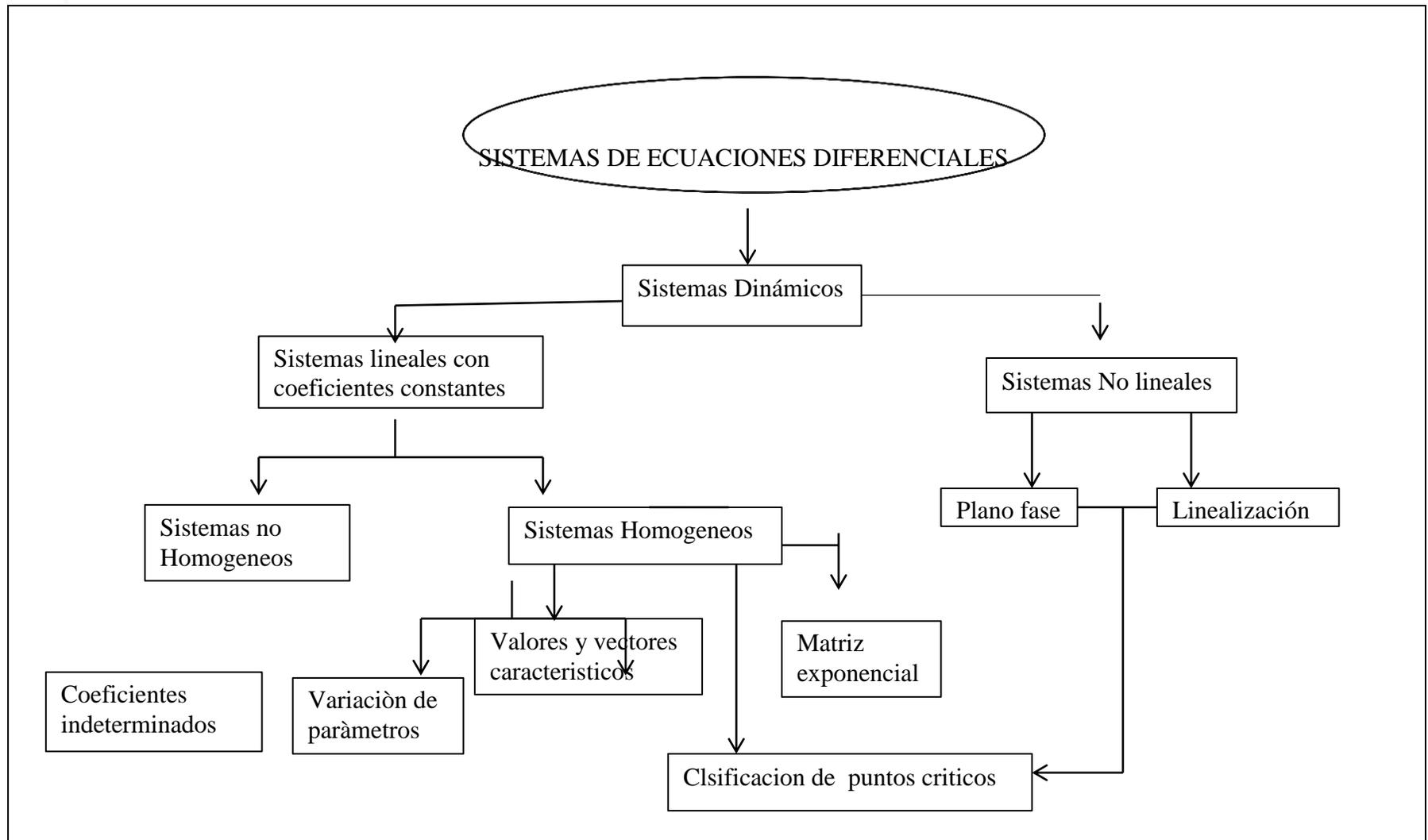
1. Comprende la importancia de trabajar en equipo un trabajo interdisciplinario.
2. Es autocritico al modelar y resolver un problema de la vida real o de las ciencias e ingenieria.
3. Se expresa adecuadamente tanto en forma verbal como escrita.
4. Participa activamente en estudios de casos para modelar y resolver problemas



# UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

|   | entendiendo los algoritmos utilizados e interpretando los resultados computacionales utilizados.   |   |
|---|--|---|
| Saberes involucrados en la UA o Asignatura  |  |   |
| Saber (conocimientos)   | Saber hacer (habilidades)  | Saber ser (actitudes y valores)   |
| <p>Clasificar un sistema de ecuaciones diferenciales.</p> <p>Comprende las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema de ecuación diferencial tenga solución.</p> <p>Distinguir los diferentes tipos de expresar la solución de un sistema</p> <p>Analiza las trayectorias de un sistema dependiendo del tipo de punto crítico.</p>   | <p>Encontrar los valores y vectores característicos de una matriz</p> <p>Identifica claramente los términos homogéneos y no homogéneos de un sistema de ecuaciones. Utiliza el método adecuado para encontrar la solución particular de un sistema lineal no homogéneo.</p> <p>Determina claramente la estabilidad de los puntos críticos (silla, nodo, espiral o centro)</p> <p>Utiliza herramientas computacionales (equipo de cómputo y software) como apoyo para plantear, resolver y analizar problemas aplicados tanto a la matemática misma como a otras áreas.</p> | <p>Respeto hacia el maestro y los demás compañeros.</p> <p>Respeto a los compañeros cuando expresan su opinión.</p> <p>Maneja adecuadamente los tiempos para realizar las actividades o tareas extra clase.</p> <p>Asume una actitud positiva y proactiva a la hora de trabajar con otros integrantes del grupo.</p> <p>Indaga sobre cómo resolver un problema cuando se enfrenta con ciertas dificultades.</p> |
| Producto Integrador Final de la UA o Asignatura   |  |   |
| <p><b>Título del Producto:</b> Portafolio de ejercicios</p> <p><b>Objetivo:</b> Construir un portafolio de todos los ejercicios que realice de cada uno de los temas según el programa establecido que permita evidenciar los conocimientos adquiridos en la UA Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con el propósito de tener un concentrado de una gran variedad de problemas para utilizarlos en un momento dado ya sea al resolver un problema real o de la ciencia misma.</p> <p><b>Descripción:</b> El concentrado de ejercicios se realizará por unidad, siguiendo el orden del programa, especificando el método de solución en cada uno de los bloques y debidamente revisados por el maestro.</p> |  |   |

### 3. ORGANIZADOR GRÁFICO DE LOS CONTENIDOS DE LA UA O ASIGNATURA



#### 4. SECUENCIA DEL CURSO POR UNIDADES TEMÁTICAS

##### Unidad temática 1: Introducción a los Sistemas Dinámicos (2.5 hrs)

**Objetivo de la unidad temática:** Aplicar los conceptos vistos en la UA 15963 (sistemas de ecuaciones diferenciales) en la modelación de un sistema de ecuaciones diferenciales. Relacionar una ecuación diferencial de orden  $n$  con un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales lineales.



# UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

**Introducción:** Existe una estrecha relación entre una ecuación diferencial de orden  $n$  y un sistema lineal de ecuaciones diferenciales. Aquí se explica como se realiza la transformación de una ecuación a un sistema y después se presentan algunos modelos que surgen en la física-matemática o en la vida real. En esta unidad temática se reafirman los conceptos básicos de los sistemas de ecuaciones diferenciales vistos en la UA 15963. Se hace una clasificación de los mismos (lineales, no lineales, autónomo, coeficientes constantes o variables etc).

| Contenido temático   | Saberes involucrados  | Producto de la unidad temática  |
|--|---|---|
| <b>1. Introducción.</b><br>1.1. Conceptos básicos<br>1.2. Relación de los sistemas de primer orden y las ecuaciones de segundo orden.<br>1.3. Propiedades de los sistemas autónomos.<br>1.4. Modelos de especies que interactúan | Relación entre las variables dependientes e independientes.<br>Clasificación de las Ecuaciones diferenciales Ordinarias de orden $n$ .<br>Parametrizar una ecuación diferencial<br>Desparametrizar un sistema de ecuaciones | Ejercicios resueltos en clase, comparando sus respuestas con otros compañeros<br>Transformar una ecuación diferencial a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.<br>Ejercicios extra clase para el portafolio. |

## Unidad temática 2: Sistemas Lineales con coeficientes constantes (8.5 hrs)

**Objetivo de la unidad temática:** Aplicar los diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales

**Introducción:** En esta unidad temática se aplicarán los métodos de solución para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Así como las diferentes formas en que puede expresarse la solución de un sistema lineal. Esto es de gran importancia a la hora de resolver algunos problemas de la física o matemática misma o áreas afines, además se hará un análisis detallado de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.

| Contenido temático   | Saberes involucrados   | Producto de la unidad temática   |
|--|--|--|
| 2.1. Sistemas lineales homogéneos;<br>2.2. Solución por Valores y vectores característicos<br>2.3. Solución por diagonalización.<br>2.4. Sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos.<br>2.4.1. Coeficientes indeterminados<br>2.4.2. Variación de parámetros<br>2.5. Matriz exponencial | Conceptos básicos del álgebra matricial<br>Resolver el polinomio característico para obtener los valores y vectores característicos de una matriz.<br>Desarrollo en serie de Taylor de una función.<br>Saber expresar la solución de un sistema en forma matricial.<br>Identificar cuando un sistema se puede resolver por diagonalización.<br>Verificar que una matriz fundamental satisface las propiedades que un conjunto fundamental de soluciones de una ecuación diferencial. | Ejercicios resueltos en clase, comparando sus respuestas con otros compañeros<br>Ejercicios extra clase para el portafolio revisados por el maestro. |

## Unidad temática 3: Estabilidad según Lyapunov y estabilidad asintótica (4 hrs)

**Objetivo de la unidad temática:** La unidad temática pretende aplicar la estabilidad tanto en sistemas lineales como en sistemas no lineales. Se analiza la estabilidad de los puntos críticos del sistema lineales según Lyapunov.

**Introducción:** La teoría de la estabilidad juega un rol muy importante dentro de la teoría de sistemas e ingeniería. Es la principal característica de los sistemas dinámicos ya que, en los sistemas dinámicos existen distintos tipos de problemas de estabilidad y se analizarán esos diferentes tipos de problemas. Se tratará la estabilidad en puntos de equilibrio. Un punto de equilibrio se dice estable si todas las soluciones que inician cercanas al punto de equilibrio



permanecen cercanas al él, de otro modo se dice que es inestable. Los teoremas de estabilidad de Lyapunov dan condiciones suficientes para la estabilidad del punto de equilibrio.

| Contenido temático   | Saberes involucrados  | Producto de la unidad temática   |
|--|---|--|
| 3.1. El criterio de la estabilidad de un sistema lineal con coeficientes constantes.<br>3.2 Teorema de Lyapunov sobre la estabilidad en una primera aproximación<br>3.3. Función de Lyapunov: lema de Lyapunov sobre estabilidad y estabilidad asintótica<br>3.4. Teorema de Chetaev sobre inestabilidad | Concepto de estabilidad en un sistema de ecuaciones,<br>Puntos críticos, trayectorias.<br>Derivadas parciales para encontrar la función de Lyapunov.<br>Conocer los metodos de Lyapunov para determinar la estabilidad de un sistema.<br>Aplicar las formas de linealizar un sistema para analizar la estabilidad de los puntos criticos. | Ejercicios resueltos en clase, comparando sus respuestas con otros compañeros<br>Ejercicios extra clase para el portafolio revisados por el maestro. |

**Unidad temática 4: Retrato fase para un sistema lineal plano (dos variables) (8 hrs)**

**Objetivo de la unidad temática:** Analizar la naturaleza de los puntos criticos de un sistema de 2x2 a traves de la traza y el determinante y visualizarlo geometricamente a traves de algun software.

**Introducción:** Una de las formas mas claras de entender el comportamiento de las trayectorias de un sistema de ecuaciones diferenciales y la naturaleza de los puntos criticos es la forma gráfica. Después de calcular todos los puntos criticos del sistema se puede analizar la naturaleza de cada uno de los puntos criticos mediante el calculo de la traza y el determinante de la matriz. A traves del plano fase es muy claro saber que tipo de punto critico es y sobre todo si es estable o inestable

| Contenido temático   | Saberes involucrados  | Producto de la unidad temática  |
|--|---|---|
| 4.1. Cambios de coordenadas.<br>4.2. La traza y determinante de un sistema planar.<br>4.3. Clasificación de los puntos singulares (puntos de equilibrio) en el plano ( $R^2$ ): el nodo, el de silla, el foco, el centro<br>4.4. Separatrices. | Solución de sistemas para determinar los puntos criticos. Identificar la analogia entre el sistema cartesiano xy con el sistema planar (traza – determinante) para clasificar el punto critico. | Ejercicios resueltos en clase, impresion del diagrama fase para analizar el tipo de punto critico.<br>Ejercicios extra clase para el portafolio revisados por el maestro. |

**Unidad temática 5: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales No Lineales (7 hrs)**

**Objetivo de la unidad temática:** Analizar el comportamiento de las soluciones (trayectorias) de un sistema no lineal cerca de un punto critico a partir del comportamiento de las soluciones de un sistema lineal cerca del origen.

**Introducción:** Rara vez es posible determinar la estabilidad del punto critico de un sistema no lineal calculando soluciones explicitas, como en el caso de los sistemas lineales, sin embargo si se puede dar un comportamiento local de las soluciones del sistema mediante el comportamiento de la soluciones del sistema lineal correspondiente. La comprension de las trayectorias se obtiene mas facilmente cuando se visualizan geometricamente.

| Contenido temático | Saberes involucrados | Producto de la unidad temática |
|--------------------|----------------------|--------------------------------|
|--------------------|----------------------|--------------------------------|



## UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

|  |  |   |
|--|--|---|
| <p>5.1. Plano de fase para sistemas autónomos no lineales.<br/>Relación con puntos de equilibrio del sistema linealizado.</p> <p>5.2. Teorema de existencia y unicidad.</p> <p>5.3.. Dependencia continua de las soluciones</p> <p>5.4. Estabilidad de las trayectorias.</p> <p>5.5. Bifurcaciones y caos.</p> <p>5.6. Mapa de Poincaré.</p> <p>5.7. teorema de Poiincaré-Bendixson.</p> | <p>Diferenciar un sistema autonomo y uno no autonomo.</p> <p>Conocer y aplicar el teoremoa de existencia y unicidad de un sistema de ecuaciones no lineales.</p> <p>Conocer el criterio de estabilidad para los sistemas autonomos planos.</p> <p>Clasificacion de los puntos criticos.</p> <p>Analizar la estabilidad local de las trayectorias de un sistema no lineal a traves del analisis del sistema lineal.</p> <p>Aplicar el teorema de Poincare-Bendixson</p> | <p>Ejercicios resueltos en clase,<br/>impresion del diagrama fase para<br/>analizar el tipo de punto critico.</p> <p>Ejercicios extra clase para el<br/>portafolio revisados por el maestro</p> |
|--|--|---|



**5. EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN**

**Requerimientos de acreditación:**

De acuerdo al reglamento general de Evaluación y Promoción de alumnos de la Universidad de Guadalajara.  
 (<http://www.udg.mx/es/nuestra/normatividad/norma-reglamento-general-de-evaluacion-y-promocion-de-alumnos>)  
 El alumno debe cumplir con al menos el 80% de asistencias de clases  
 Tener todas las actividades (ejercicios en clase y extra clase) de todo el curso registradas.  
 Participar en las actividades académicas del curso.  
 Cumplir con los requisitos para presentar el examen y realizarlo con honestidad.

**Criterios generales de evaluación:**

La evaluación se realizara de la siguiente manera:  
 Exámenes parciales, 60 %  
 Actividades 30%  
 Producto final, 10%

**Evidencias o Productos**

| Evidencia o producto | Competencias y saberes involucrados   | Contenidos temáticos   | Ponderación |
|----------------------|---|--|-------------|
| Primer Examen        | Todos los conceptos involucrados en las unidades temáticas 1 y 2.<br>Métodos de solución para sistemas lineales; homogéneos y no homogéneos.<br>Formas de representar la solución de un sistema lineal  | Transformar una ecuación diferencial a un sistema de ecuaciones lineales.<br>Propiedades de los sistemas dinámicos. Valores y vectores característicos. Forma matricial                            | 30%         |
| Segundo examen       | Todos los conceptos involucrados en las unidades temáticas 3, 5 y 5.<br>Estabilidad e inestabilidad de un punto de equilibrio según Lyapunov. Clasificación de los puntos críticos (nodo, silla, centro, espiral) tanto para sistemas lineales como no lineales | Teoremas de Lyapunov,<br>Clasificación de los puntos críticos.<br>Mediante la traza y el determinante.<br>Linealización de un sistema no lineal.<br>Bifurcaciones y caos.<br>Teoremas de Poincaré. | 30%         |

**Producto final**

| Descripción                             | Evaluación                 | Ponderación |
|---|----------------------------|-------------|
| <b>Título:</b> Portafolio de ejercicios | <b>Criterios de fondo:</b> |             |



# UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

| <p><b>Objetivo:</b> Construir un portafolio de todos los ejercicios que realice de cada uno de los temas según el programa establecido que permita evidenciar los conocimientos adquiridos con el propósito de tener un concentrado de una gran variedad de problemas para utilizarlos en un momento dado ya sea al resolver un problema real o de la ciencia misma.</p> | <p>Para su aprobación, todos los ejercicios deben estar bien resueltos, revisados por el maestro y con el uso adecuado del lenguaje.</p> <p><b>Criterios de forma:</b><br/>El portafolio se entrega en hojas y dentro de un folder. Con orden y limpieza y bien estructurado</p> | <p><b>10%</b></p> |
|--|--|-------------------|
| <p><b>Caracterización</b> El concentrado de ejercicios se realizará por bloques, siguiendo el orden del programa y especificando el método de solución en cada uno de los bloques.</p>   |  |                   |
| Otros criterios  |  |                   |
| Criterio   | Descripción  | Ponderación       |
| Tareas y participación   | <p>El estudiante debe hacer y entregar todos los ejercicios que se dejen de tarea para su revisión.<br/>Debe tener una participación activa en la clase en la resolución de los problemas.</p>   | <p>30%</p>        |

| 6. REFERENCIAS Y APOYOS   |      |   |                |   |
|---|------|---|----------------|---|
| Referencias bibliográficas  |      |   |                |   |
| Referencias básicas   |      |   |                |   |
| Autor (Apellido, Nombre)  | Año  | Título  | Editorial      | Enlace o bibliotecar virtual donde esté disponible (en su caso) |
| Perko, Laurence   | 2008 | Differential Equations and dynamycal systems                        | Springer       |   |
| Hirsch, Morris  | 2008 | Differential Equations, Dinamycal Systems and Introduction to chaos | Academic Press |   |
| Zill, Dennis G y Warren S: Wright   | 2012 | Matematicas Avanzadas para Ingenieria                               | Mc Graw Hill   |   |
| Apoyos (videos, presentaciones, bibliografía recomendada para el estudiante)              |      |   |                |   |
| <p>Unidad temática 1: : <a href="https://wp.me/p5P46A-6Z">https://wp.me/p5P46A-6Z</a></p> |      |   |                |   |
| <p>Unidad temática 2: <a href="https://wp.me/p5P46A-iy">https://wp.me/p5P46A-iy</a></p>   |      |   |                |   |



# UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

**Unidad temática 3:** <https://wp.me/p5P46A-j3>

**Unidad temática 4:** <https://www.youtube.com/watch?v=77u0OC96mec>